

О δ -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПОЛУПРОСТЫХ СТРУКТУРИЗУЕМЫХ АЛГЕБР.

И.Б. КАЙГОРODOV, Е.М. ОХАПКИНА

АБСТРАКТ. В статье показано отсутствие нетривиальных δ -дифференцирований полупростых конечномерных структуризуемых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2,3,5.

Keywords: δ -дифференцирование, структуризуемая алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие δ -дифференцирования впервые появляется в работе [1], как обобщение обыкновенного дифференцирования. Напомним, что при фиксированном δ из основного поля F , под δ -дифференцированием алгебры A понимают линейное отображение ϕ , удовлетворяющее условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)) \quad (1)$$

для произвольных элементов $x, y \in A$. В работе [2] В. Т. Филиппов доказал [2], что любая первичная алгебра Ли не имеет ненулевого δ -дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. Работа [4] посвящена описанию δ -дифференцирований простых конечномерных йордановых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. В дальнейшем, в работе [6] было дано описание δ -дифференцирований полупростых конечномерных йордановых алгебр над произвольным полем характеристики отличной от 2 и δ -(супер)дифференцирований простых конечномерных лиевых и йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Для алгебр и супералгебр из работ [4, 5, 6] было показано отсутствие нетривиальных δ -(супер)дифференцирований. Цикл статей по описанию δ -(супер)дифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр заканчивается работой [9], где было дано полное описание δ -(супер)дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Отметим, что некоторые обобщения δ -дифференцирований были предложены в следующих работах [11, 12, 13, 14, 15].

2. ПРИМЕРЫ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Класс структуризуемых алгебр был введен в 1978 году Б. Н. Аллисоном [16]. Данный класс алгебр представляет интерес в связи с тем, что в него попадают такие объекты, как: тензорное произведение композиционных алгебр, 56-мерный модуль Фрейденталя над E_7 с естественной бинарной операцией,

35-мерная алгебра $T(C)$; в нем имеет естественное обобщение конструкция Кантора-Кчхера-Титса.

Структуризуемые алгебры — это алгебры с единицей, которую будем обозначать e и инволюцией $\bar{}$, удовлетворяющие тождеству 2:

$$[T_z, V_{x,y}] = V_{T_z x, y} - V_{x, T_z y}, \text{ где } T_z, V_{x,y} \in \text{End}(A), \quad (2)$$

$$V_{x,y}(z) = (x\bar{y})z + (z\bar{y})x - (z\bar{x})y, T_z = V_{z,1} \text{ для } x, y, z \in A.$$

Пусть алгебра $(A, \bar{})$ — алгебра с инволюцией, тогда как векторное пространство A распадается в прямую сумму $A = H \oplus S$, где $H = \{a \in A | \bar{a} = a\}$ — множество симметрических элементов, $S = \{a \in A | \bar{a} = -a\}$ — множество всех кососимметрических элементов. В структуризуемых алгебрах для любых элементов $x, y \in A, a, b, c \in H, s \in S$ также выполняются следующие тождества 3 – 5:

$$(s, x, y) = -(x, s, y), \quad (3)$$

$$(a, b, c) - (b, c, a) = (c, a, b) - (c, b, a), \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}[[a^2, a], b] = (b, a^2, a) - (b, a, a^2). \quad (5)$$

Приведем примеры структуризуемых алгебр (см, [17, 18]):

S1) Пусть $(A, \bar{})$ — унитарная ассоциативная алгебра с инволюцией. Тогда $(A, \bar{})$ — структуризуемая алгебра.

S2) Пусть J — йорданова алгебра. Положим $\bar{} = id$. Для $(J, \bar{})$ тождество 2 превращается в тождество

$$[L_c, V_{a,b}] = V_{ca,b} - V_{a,cb}$$

выполняющееся в произвольной йордановой алгебре. Поэтому $(J, \bar{})$ — структуризуемая алгебра.

S3) Пусть $(E, \bar{})$ — ассоциативная алгебра с инволюцией и W — левый E -модуль относительно действия $\circ : E \times W \rightarrow W$. Предположим, что на W задана эрмитова форма h , т.е. такое билинейное отображение $h : W \times W \rightarrow E$, что

$$\overline{h(w_1, w_2)} = h(w_2, w_1),$$

$$h(e_1 \circ w_1, w_2) = e_1 h(w_1, w_2)$$

для любых $w_1, w_2 \in W$ и $e \in E$. На пространстве $A = E \oplus W$ операции умножения и инволюции вводятся следующим образом:

$$(e_1, w_1) \bullet (e_2, w_2) = (e_1 e_2 + h(w_2, w_1), e_2 \circ w_1 + \overline{e_1} \circ w_2),$$

$$\overline{(e, w)} = (\bar{e}, \bar{w}).$$

Алгебра с инволюцией $(A, \bar{})$ — структуризуемая алгебра. Она является обобщением йордановой алгебры билинейной формы и называется алгеброй эрмитовой формы. Алгебра эрмитовой формы будет проста, если эрмитова форма h на левом E -модуле невырождена и $(E, \bar{})$ — центральная простая алгебра с инволюцией.

S4) Пусть $(G_1, -)$ и $(G_2, -)$ — композиционные алгебры со стандартной инволюцией (подробнее о композиционных алгебрах см., к примеру, [19]). На алгебре $A = G_1 \otimes G_2$ определим инволюцию $\overline{x_1 \otimes x_2} = \overline{x_1} \otimes \overline{x_2}$. Тогда $(A, -)$ — структуризуемая алгебра.

S5) Пусть J, J' — векторные пространства над F , обладающие трилинейными формами N и N' и связанные посредством $T : J \times J' \rightarrow F$ невырожденной билинейной формой. Для $j, k \in J, j', k' \in J'$ определяют $j \times k \in J'$ и $j' \times k' \in J$ условием

$$T(l, j \times k) = N(j, k, l), T(j' \times k', l') = N'(j', k', l')$$

для любых $l \in J, l' \in J'$. Определяют также операцию $\#$ на J и J' : $j^\# = \frac{1}{2}j \times j$, $j'^\# = \frac{1}{2}j' \times j'$ для $j \in J, j' \in J'$. Тройка (T, N, N') называется допустимой тройкой, заданной на паре пространств (J, J') , если N и N' нетривиальны и справедливы соотношения:

$$(j^\#)^\# = \frac{1}{6}N(j, j, j)j,$$

$$(j'^\#)^\# = \frac{1}{6}N'(j', j', j')j'$$

для $j \in J, j' \in J'$.

Рассматривается тройка (T, N, N') на паре пространств (J, J') . На пространстве матриц

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in F, j \in J, j' \in J' \right\}$$

вводится умножение

$$\begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & k \\ k' & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + T(j, k') & \alpha k + \delta j + j' \times k' \\ \gamma j' + \beta k' + j \times k & T(k, j') + \beta\delta \end{bmatrix}$$

и инволюция

$$\overline{\begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \beta & j \\ j' & \alpha \end{bmatrix}.$$

Полученная структуризуемая алгебра называется алгеброй допустимой тройки (T, N, N') на паре пространств (J, J') .

S6) Пусть C — алгебра Кэли-Диксона с инволюцией (подробнее об алгебре Кэли-Диксона, см., к примеру, [19]). Множество S кососимметрических элементов является 7-мерной простой нелиевой алгеброй Мальцева относительно операции коммутирования $[\cdot, \cdot]$ в C (см. [20]), ее обозначают через $S^{(-)}$. На $S^{(-)}$ определена невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма (\cdot, \cdot) такая, что для $x, y \in S$ верно

$$[[x, y], y] = (y, y)x - (x, y)y.$$

Через M обозначают подпространство тензорного произведения $S \otimes S$, порожденное множеством $\{s \otimes r - r \otimes s : s, r \in S\}$. Полагают $H = S \otimes S / M$ и на прямой сумме пространств $H \oplus S$ задаются коммутативная \odot и антикоммутативная $[\cdot, \cdot]$ операции условиями:

$$[s_1, s_2] = [s_1, s_2],$$

$$[s, s_1 \otimes s_2] = [s, s_1] \otimes s_2 + s_1 \otimes [s, s_2],$$

$$[s_1 \otimes s_2, s_3 \otimes s_4] =$$

$$(s_1, s_3)[s_2, s_4] + (s_1, s_4)[s_2, s_3] + (s_2, s_3)[s_1, s_4] + (s_2, s_4)[s_1, s_3],$$

$$\begin{aligned}
s_1 \odot s_2 &= s_1 \otimes s_2, \\
s \odot (s_1 \otimes s_2) &= \frac{1}{2}(s_1, s_2)s + \frac{1}{4}(s, s_1)s_2 + \frac{1}{4}(s, s_2)s_1, \\
(s_1 \otimes s_2) \odot (s_3 \otimes s_4) &= \\
&= \frac{1}{4}[s_1, s_3] \otimes [s_2, s_4] + \frac{1}{4}[s_1, s_4] \otimes [s_2, s_3] + \frac{1}{2}(s_1, s_2)s_3 \otimes s_4 + \frac{1}{2}(s_3, s_4)s_1 \otimes s_2
\end{aligned}$$

для $s, s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$, где в правой части равенства под $[\cdot, \cdot]$ подразумевается коммутатор в алгебре C .

Операции умножения и инволюции в $H \oplus S$ определяются следующим образом:

$$xy = x \odot y + \frac{1}{2}[x, y],$$

$$\overline{h + s} = h - s, \text{ где } x, y \in H \oplus S, h \in H, s \in S.$$

Полученную алгебру с инволюцией, построенную посредством алгебры Кэли-Диксона C , обозначают $T(C)$.

Отметим, что согласно результатам [18], алгебры типов $S1)$ - $S6)$ исчерпывают все простые конечномерные структуризуемые алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3, 5.

Как было отмечено выше, для фиксированного элемента δ из основного поля, под δ -дифференцированием алгебры A мы понимаем линейное отображение $\phi : A \rightarrow A$, которое при произвольных $x, y \in A$ удовлетворяет условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Под центроидом $\Gamma(A)$ алгебры A мы будем понимать множество всех линейных отображений $\chi : A \rightarrow A$, при произвольных $a, b \in A$ удовлетворяющих условию

$$\chi(ab) = \chi(a)b = a\chi(b).$$

Определение 1-дифференцирования совпадает с обычным определением дифференцирования; 0-дифференцированием является произвольный эндоморфизм ϕ алгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$. Ясно, что любой элемент центроида алгебры является $\frac{1}{2}$ -дифференцированием.

Ненулевое δ -дифференцирование ϕ будем считать нетривиальным δ -дифференцированием, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma(A)$.

3. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

В данном разделе мы приведем формулировки и доказательства основных лемм, на которые будут опираться доказательства основных результатов работы, изложенных в заключительной части. Здесь и далее все алгебры рассматриваются над алгебраически замкнутым полем F характеристики отличной от 2, 3, 5, хотя некоторые результаты нижеприведенных лемм будут верны и при некоторых ослаблениях требуемых условий на поле.

Лемма 1. Если ϕ – нетривиальное δ -дифференцирование структуризуемой алгебры A , то $\delta = \frac{1}{2}$ и для любого элемента $x \in A$ верно $\phi(x) = ax = xa$ при некотором фиксированном элементе $a \in A$.

Доказательство. Известно, что унитарные алгебры могут иметь нетривиальные δ -дифференцирования только при $\delta = \frac{1}{2}$ (см. [4, теорема 2.1]). Замечая, что структуризуемые алгебры являются унитарными с единицей e , получаем $\delta = \frac{1}{2}$. Таким образом, легко заметить, что

$$\phi(x) = 2\phi(xe) - \phi(x) = (\phi(e)x + e\phi(x)) - \phi(x) = x\phi(e).$$

Аналогично получаем, что $\phi(x) = \phi(e)x$. Лемма доказана.

Лемма 2. Алгебра невырожденной эрмитовой формы на левом E -модуле, где $(E, -)$ — центральная простая ассоциативная алгебра с инволюцией, не имеет нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований.

Доказательство Пусть $A = E \oplus W$ над полем F , где $(E, -)$ — ассоциативная алгебра с инволюцией и W — левый E -модуль и $\phi^* — $\frac{1}{2}$ -дифференцирование. Пусть $e_1 \in E$ — произвольный, e — единица алгебры A , тогда полагаем$

$$\phi^*(e) = (\alpha e + e^*, w^*), \text{ где } \alpha \in F, e^* \neq e \in E, w^* \in W.$$

Необходимо доказать $e^* = w^* = 0$. Зададим отображение $\phi = \phi^* - \phi_0$, где $\phi_0(x) = \alpha x$. В силу результатов В.Т.Филиппова о δ -дифференцированиях ассоциативных алгебр [3], легко понять, что $\phi(E) \subseteq W$ и $e^* = 0$. Заметим следующее:

$$\begin{aligned} \phi((e_1, 0) \bullet (0, w^*)) &= \frac{1}{2}\phi(e_1, 0) \bullet (0, w^*) + \frac{1}{2}(e_1, 0) \bullet \phi(0, w^*) = \\ &= \frac{1}{2}e_1 h(w^*, w^*) + \frac{1}{2}e_1 h(w^*, w^*) = e_1 h(w^*, w^*), \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned} \phi(0, \overline{e_1} \circ w^*) &= (0, \overline{e_1} \circ w^*) \bullet \phi(e) = (0, w^*) \bullet (0, \overline{e_1} \circ w^*) = \\ &= h(\overline{e_1} \circ w^*, w^*) = \overline{e_1} h(w^*, w^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(e_1 - \overline{e_1})h(w^*, w^*) = 0$ для произвольного элемента e_1 алгебры E .

Покажем, что $h(w^*, w^*)$ лежит в коммутативном центре алгебры E . Легко заметить, что

$$\begin{aligned} \phi((e_1, 0) \bullet (0, w^*)) &= \frac{1}{2}\phi(e_1, 0) \bullet (0, w^*) + \frac{1}{2}(e_1, 0) \bullet \phi(0, w^*) = \\ &= (\frac{1}{2}\overline{e_1} h(w^*, w^*) + \frac{1}{2}e_1 h(w^*, w^*), 0), \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\phi((e_1, 0) \bullet (0, w^*)) = \phi(0, \overline{e_1} \circ w^*) = (0, \overline{e_1} \circ w^*) \bullet \phi(e) = (h(w^*, \overline{e_1} \circ w^*), \alpha e \circ (\overline{e_1} \circ w^*)).$$

Приравнивая компоненты из алгебры E , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}h(w^*, \overline{e_1} \circ w^*) + \frac{1}{2}e_1 h(w^*, w^*) &= h(w^*, \overline{e_1} \circ w^*), \\ \frac{1}{2}e_1 h(w^*, w^*) &= \frac{1}{2}h(w^*, \overline{e_1} \circ w^*), \\ e_1 h(w^*, w^*) &= \overline{h(\overline{e_1} \circ w^*, w^*)}, \\ e_1 h(w^*, w^*) &= h(w^*, w^*)e_1. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора элемента e_1 , $h(w^*, w^*)$ действительно лежит в коммутативном центре $Z(E)$.

Покажем, что $Eh(w^*, w^*)$ — идеал в E . Действительно, включение $e_1 Eh(w^*, w^*) \subseteq Eh(w^*, w^*)$ тривиально. Рассмотрим $Eh(w^*, w^*)e_1$ и воспользуемся ассоциативностью алгебры E . Тогда

$$Eh(w^*, w^*)e_1 = E(h(w^*, w^*)e_1) = E(e_1 h(w^*, w^*)) \subseteq Eh(w^*, w^*).$$

Поскольку E — простая ассоциативная унитарная алгебра, то идеал $Eh(w^*, w^*) = 0$ или $Eh(w^*, w^*) = E$. Последнего быть не может, поскольку тогда элемент $h(w^*, w^*) \neq 0$, следовательно, обратим. Тогда из равенства $(e_1 - \bar{e}_1)h(w^*, w^*) = 0$ следует, что $e_1 - \bar{e}_1 = 0$, что не верно в случае нетождественной инволюции. В случае же тождественной инволюции, алгебра приводится к описанному в [4] случаю йордановых алгебр. Остается рассмотреть случай $e_1 - \bar{e}_1 \neq 0$, тогда $h(w^*, w^*) = 0$, то есть $\phi(w^*) = 0$. Положим $u \in W$ — произвольный элемент, тогда

$$\begin{aligned}\phi(uw^*) &= \frac{1}{2}\phi(u)w^*, \\ h(w^*, u)\phi(e) &= \frac{1}{2}h(w^*, u)w^*, \\ h(w^*, u)w^* &= \frac{1}{2}h(w^*, u)w^*, \\ (uw^*)w^* &= 0\end{aligned}$$

Отметим, что $h(W, Ew^*)$ идеал в E . Действительно, легко заметить, что:

$$e_1 h(W, Ew^*) = h(e_1 \circ W, Ew^*) \subseteq h(W, Ew^*)$$

и

$$h(W, Ew^*)e_1 = \overline{\bar{e}_1 h(W, Ew^*)} \subseteq h(W, Ew^*).$$

Поскольку эрмитова форма $h : W \times W \rightarrow E$ не вырождена, то идеал не нулевой, а так как алгебра E простая, то $h(W, Ew^*) = E$. Тогда $\sum_i u_i(a_i w^*) = 1$, и можно заключить, что

$$\sum_i u_i(a_i w^*) = \sum_i h(a_i w^*, u_i) = \sum_i a_i h(w^*, u_i) = 1.$$

Легко заметить, что

$$w^* = \left(\sum_i a_i h(w^*, u_i)\right)w^* = \sum_i a_i (h(w^*, u_i)w^*) = \sum_i a_i ((u_i w^*)w^*) = 0.$$

Таким образом, $\phi^*(e) = \alpha e$. Лемма доказана.

Лемма 3. Алгебра тензорного произведения композиционных алгебр не имеет нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований.

Доказательство. Пусть A, B — композиционные алгебры (о композиционных алгебрах см., к примеру, [19]) с единицами $1_A, 1_B$ соответственно, и e — единица алгебры $A \otimes B$. Тогда, если ϕ — $\frac{1}{2}$ -дифференцирование алгебры $A \otimes B$, то $\phi(e) = \sum_i a_i \otimes b_i, a_i \in A, b_i \in B$. Пользуясь леммой 1, легко видеть, что a_i и b_i лежат в коммутативных центрах алгебр A и B , соответственно.

Легко заметить, что

$$\phi(ac \otimes 1_B) = \frac{1}{2}\phi(a \otimes 1_B)(c \otimes 1_B) + \frac{1}{2}(a \otimes 1_B)\phi(c \otimes 1_B).$$

По лемме 1 из предыдущего равенства получим

$$(ac \otimes 1_B)\phi(1_A \otimes 1_B) = \phi(ac \otimes 1_B) = \phi((a \otimes 1_B)(c \otimes 1_B)) =$$

$$\frac{1}{2}((a \otimes 1_B)\phi(1_A \otimes 1_B))(c \otimes 1_B) + \frac{1}{2}(a \otimes 1_B)((c \otimes 1_B)\phi(1_A \otimes 1_B)),$$

то есть

$$\sum_i (ac)a_i \otimes b_i = \frac{1}{2} \sum_i ((aa_i)c \otimes b_i + a(ca_i) \otimes b_i).$$

Последнее влечет

$$\sum_i (2(ac)a_i - (aa_i)c - a(ca_i)) \otimes b_i = 0 \quad \text{и} \quad 2(ac)a_i - (aa_i)c - a(ca_i) = 0.$$

Следовательно, мы можем заключить, что $(a, a_i, c) = 0$. Поскольку композиционные алгебры альтернативны, то $(a, c, a_i) = 0 = (a_i, a, c)$. Таким образом, a_i лежит в коммутативно-ассоциативном центре $Z(A)$.

Поскольку алгебра $A \otimes B$ изоморфна алгебре $B \otimes A$, то аналогично получаем, что b_i лежит в коммутативно-ассоциативном центре $Z(B)$.

Теперь покажем, что отображение $\phi : A \otimes B \rightarrow A \otimes B$, заданное по правилу

$$\phi(x \otimes y) = (x \otimes y) \left(\sum_i a_i \otimes b_i \right), \quad \text{где } a_i \in Z(A), b_i \in Z(B),$$

является элементом центроида алгебры $A \otimes B$, то есть тривиальным δ -дифференцированием.

Легво видеть, что

$$\phi((a \otimes b)(c \otimes d)) = \phi(ac \otimes bd) = (ac \otimes bd) \left(\sum_i a_i \otimes b_i \right) =$$

$$\sum_i aca_i \otimes bdb_i = \sum_i (aa_i \otimes bb_i)(c \otimes d) = \phi(a \otimes b)(c \otimes d).$$

Аналогично показываем, что $\phi((a \otimes b)(c \otimes d)) = (a \otimes b)\phi(c \otimes d)$. Лемма доказана.

Лемма 4. Алгебра допустимой тройки (T, N, N') не имеет нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований.

Доказательство. Пусть $\phi(e) = \begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix}$ и некоторый произвольный элемент алгебры $x = \begin{bmatrix} \gamma & k \\ k' & \delta \end{bmatrix}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$, $k, j \neq 0 \in J$, $k', j' \neq 0 \in J'$. Из леммы 1 имеем $x\phi(e) = \phi(e)x$, тогда

$$\begin{aligned} \phi(e)x &= \begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & k \\ k' & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma + T(j, k') & \alpha k + \delta j + j' \times k' \\ \gamma j' + \beta k' + j \times k & T(k, j') + \beta\delta \end{bmatrix}, \\ x\phi(e) &= \begin{bmatrix} \gamma & k \\ k' & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & j \\ j' & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha + T(k, j') & \gamma j + \beta k + k' \times j' \\ \alpha k' + \delta j' + k \times j & T(j, k') + \delta\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось

$$\gamma j' + \beta k' + j \times k = \alpha k' + \delta j' + k \times j.$$

В силу произвольности выбора x , положим $k = j$, $\gamma \neq \delta$. Тогда получаем $\alpha = \beta$, $j' = 0$. Аналогично из равенства

$$\alpha k + \delta j + j' \times k' = \gamma j + \beta k + k' \times j',$$

полагая $k' = j'$ и $\delta \neq \gamma$, получаем $j = 0$. Следовательно, $\phi(e) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Лемма доказана.

Лемма 5. Алгебра $T(C)$ не имеет нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований.

Доказательство. Напомним, что $S^{(-)}$ — простая 7-мерная нелиевая алгебра Мальцева относительно операции коммутирования $[\cdot, \cdot]$ в C , S — множество кососимметричных относительно инволюции элементов алгебры C . Легко видеть, что $e_i \in S$ при $i = 2, 3, \dots, 8$.

Пусть $\phi(e) = h^* + s^*$, где $h^* \in H$, $s^* \in S$, e — единица алгебры. Тогда:

$$\begin{aligned} [\phi(e), s] &= 0, \\ [h^* + s^*, s] &= 0, \\ [h^*, s] + [s^*, s] &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $[s^*, s] = 0$. Действительно, поскольку алгебра $S^{(-)}$ — простая, то ее аннулятор нулевой. Легко видеть, что s^* лежит в аннуляторе алгебры $S^{(-)}$, т.е. $s^* = 0$. Следовательно, $[h^*, s] = 0$.

Легко видеть (к примеру, см. [21]), что в алгебре Кэли-Диксона C можно выбрать базис так, чтобы умножение базисных элементов алгебры задавалось следующей таблицей:

$$\begin{aligned} e_2 &= e_1 e_2 = e_5 e_6 = e_7 e_8 = e_3 e_4, \\ e_3 &= e_1 e_3 = e_7 e_6 = e_4 e_2 = e_8 e_5, \\ e_4 &= e_1 e_4 = e_2 e_3 = e_6 e_8 = e_7 e_5, \\ e_5 &= e_1 e_5 = e_6 e_2 = e_4 e_7 = e_3 e_8, \\ e_6 &= e_1 e_6 = e_2 e_5 = e_8 e_4 = e_3 e_7, \\ e_7 &= e_1 e_7 = e_5 e_4 = e_8 e_2 = e_6 e_3, \\ e_8 &= e_1 e_8 = e_2 e_7 = e_4 e_6 = e_5 e_3. \end{aligned}$$

Пусть элемент h^* расписывается по базису алгебры таким образом:

$$h^* = \sum_{i=2}^8 \alpha_{ij} e_i \otimes e_j.$$

Из структуры самой алгебры известно также равенство $[h^*, x] = 0 = [x, h^*]$. Исследуем произведения $[e_j, h^*]$. Из равенства

$$[e_2, \sum_{i=2}^8 \alpha_{ij} e_i \otimes e_j] = 0$$

получим условия на α_{ij} , после чего интересующий нас элемент можно записать так:

$$\begin{aligned} h^* &= \alpha_{22} e_2 \otimes e_2 + \alpha_{33} e_3 \otimes e_3 + \alpha_{33} e_4 \otimes e_4 + \alpha_{35} e_3 \otimes e_5 + \alpha_{45} e_4 \otimes e_5 + \alpha_{55} e_5 \otimes e_5 - \\ &\alpha_{45} e_3 \otimes e_6 + \alpha_{35} e_4 \otimes e_6 + \alpha_{55} e_6 \otimes e_6 + \alpha_{37} e_3 \otimes e_7 + \alpha_{47} e_4 \otimes e_7 + \alpha_{57} e_5 \otimes e_7 + \alpha_{67} e_6 \otimes e_7 + \\ &\alpha_{77} e_7 \otimes e_7 + \alpha_{28} e_2 \otimes e_8 - \alpha_{47} e_3 \otimes e_8 + \alpha_{37} e_4 \otimes e_8 - \alpha_{67} e_5 \otimes e_8 + \alpha_{57} e_6 \otimes e_8 + \alpha_{77} e_8 \otimes e_8. \end{aligned}$$

Проводя умножение на e_j ($j = 3, 4, 5, 6, 7$), получим, что все $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Совместив все результаты с полученными данными из равенства $[e_8, h^*] = 0$, легко заметить, что $\alpha_{ii} = \alpha_{jj}$ для любых i, j .

Таким образом, $h^* = \sum_{i=2}^8 \alpha e_i \otimes e_i$.

Покажем, что $(e_i, e_i) = -4$, а $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$:

$$\begin{aligned} [[e_j, e_i], e_i] &= (e_i, e_i) e_j - (e_j, e_i) e_i; \\ [e_j, e_i] e_i - e_i [e_j, e_i] &= 2[e_j, e_i] e_i = \end{aligned}$$

$$2(e_j e_i - e_i e_j) e_i = 4(e_j e_i) e_i = -4e_j.$$

Используя этот факт и умножение в алгебре $T(C)$, прямой подстановкой и проверкой легко видеть, что единицей алгебры является элемент $e = -\frac{1}{16} \sum_{i=2}^8 e_i \otimes e_i$. Пусть $\beta = -\frac{\alpha}{16}$. Тогда $h^* = \beta e$. Лемма доказана.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 6. Простая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2, 3, 5$ не имеет нетривиальных δ -дифференцирований.

Доказательство. Согласно работе [18], простая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2, 3, 5$ изоморфна одной из алгебр типа S1)-S6) из числа перечисленных в параграфе 2. Заметим, что по лемме 1 возможны нетривиальные δ -дифференцирования только при $\delta = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что

- 1) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S1) следует из работы [3],
- 2) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S2) следует из работы [4],
- 3) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S3) следует из леммы 2,
- 4) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S4) следует из леммы 3,
- 5) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S5) следует из леммы 4,
- 6) отсутствие нетривиальных $\frac{1}{2}$ -дифференцирований для алгебр типа S6) следует из леммы 5.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 7. Полупростая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2, 3, 5$ не имеет нетривиальных δ -дифференцирований.

Доказательство. Согласно работе [18], если A — полупростая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3, 5, то $A = \bigoplus A_i$, где A_i — простая структуризуемая алгебра. Пусть e_k — единица алгебры A_k . Если $x_i \in A$, то $\phi(x_i) = x_i^+ + x_i^-$, где $x_i^+ \in A_i$, $x_i^- \notin A_i$. Положим $e^i = \sum e_k - e^i$ и $\phi(e^i) = e^{i+} + e^{i-}$, где $e^{i+} \in A_i$, $e^{i-} \notin A_i$. Тогда

$$0 = \phi(x_i e^i) = \delta(\phi(x_i) e^i + x_i \phi(e^i)) = \delta((x_i^+ + x_i^-) e^i + x_i (e^{i+} + e^{i-})) = \delta(x_i^- + x_i e^{i+}),$$

откуда $x_i^- = 0$. Таким образом ϕ инвариантно на A_i . По теореме 6, A_i не имеет нетривиальных δ -дифференцирований. Тогда и полупростая алгебра A не имеет нетривиальных δ -дифференцирований. Теорема доказана.

Отметим, что в работе [11] вводится понятие обобщенного δ -дифференцирования. Линейное отображение χ мы называем обобщенным

δ -дифференцированием, если оно связано с δ -дифференцированием ϕ посредством следующих соотношений

$$\chi(xy) = \delta(\chi(x)y + x\phi(y)) = \delta(\phi(x)y + x\chi(y)).$$

Согласно результатам работы [11], унитарные алгебры не имеют обобщенных δ -дифференцирований, отличных от обобщенных дифференцирований и δ -дифференцирований. Там же было показано, что если обобщенное δ -дифференцирование является обобщенным дифференцированием, то оно является суммой дифференцирования и элемента центроида. Таким образом, из теоремы 7 следует

Теорема 8. Пусть χ — обобщенное δ -дифференцирование полупростой конечномерной структуризуемой алгебры A над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2, 3, 5$, тогда $\chi \in \text{Der}(A) + \Gamma(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **39** (1998), №6, 1409–1422.
- [2] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях первичных алгебр Ли*, Сиб. матем. ж., **40** (1999), №1, 201–213.
- [3] Филиппов В. Т., *О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр*, Алгебра и Логика, **39** (2000), №5, 618–625.
- [4] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр*, Алгебра и Логика, **46** (2007), №5, 585–605.
- [5] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях классических супералгебр Ли*, Сиб. мат. ж., **50** (2009), №3, 547–565.
- [6] Кайгородов И. Б., *О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых илиевых супералгебр*, Алгебра и Логика, **49** (2010), №2, 195–215.
- [7] Zusmanovich P., *On δ -derivations of Lie algebras and superalgebras*, J. of Algebra, **324** (2010), №12, 3470–3486.
- [8] Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., *О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки*, Алгебра и анализ, **23** (2011), №4, 40–58.
- [9] Кайгородов И. Б., *О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр*, Мат. заметки, **91** (2012), №2, 200–213.
- [10] Кайгородов И. Б., *О δ -дифференцированиях n -арных алгебр*, Известия РАН. Серия Математическая, **76** (2012), №6, 81–94.
- [11] Кайгородов И. Б., *Об обобщенных δ -дифференцированиях*, arXiv:1107.4420.
- [12] Кайгородов И. Б., *$(n+1)$ -Арные дифференцированиях простых n -арных алгебр*, Алгебра и логика, **50** (2011), №5, 689–691.
- [13] Шестаков А. И., *Тернарные дифференцирования простых конечномерных сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр*, Сиб. мат. ж., **53** (2012), №5, 1178–1195.
- [14] Кайгородов И. Б., *О йордановых δ -дифференцированиях ассоциативных алгебр*, Фундаментальная и прикладная математика, **17** (2012), №7, 45–49.
- [15] Burde D., Dekimpe K., *Post-Lie algebra structures and generalized derivations of semisimple Lie algebras*, arXiv:1108.5950
- [16] Allison B. N., *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras*, Math. Ann., **237** (1978), 133–156.
- [17] Смирнов О. Н., *Пример простой структуризуемой алгебры*, Алгебра и Логика **29** (1990), №4, 331–336.
- [18] Смирнов О. Н., *Простые и полупростые структуризуемые алгебры*, Алгебра и Логика **29** (1990), №5, 571–596.
- [19] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., *Кольца близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978.
- [20] Кузьмин Е. Н., *Структура и представления конечномерных алгебр Мальцева*, в кн.: Исследования по теории колец и алгебр (Труды Ин-та математики СО АН СССР, 16), Новосибирск, Наука, 1989, 75–101.

- [21] Pozhidaev A. P., Saraiva P., *On Derivations of the Ternary Malcev Algebra M_8* , Comm. Algebra, **34** (2006), №10, 3593–3608.

ИВАН БОРИСОВИЧ КАЙГОРДОВ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: kib@math.nsc.ru

ЕЛИЗАВЕТА МАКСИМОВНА ОХАПКИНА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ,
УЛ. ПИРОГОВА 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: eliza_okhapkina@mail.ru